
KRUMMLINIGE KOORDINATEN

[H31] *Donut* **[8 Punkte]**

Betrachten Sie in der xz-Ebene einen Kreis vom Radius R, dessen Mittelpunkt von der z-Achse den Abstand $a > R$ hat. Durch Rotation dieses Kreises um die z-Achse entsteht ein Torus. Berechnen Sie den Flächeninhalt F der Torus-Oberfläche, indem Sie die aus der Vorlesung bekannten Formeln anwenden auf die Parameterdarstellung

$$\vec{r}(t,s) \doteq \big((a+R\cos s)\cos t\,,\ (a+R\cos s)\sin t\,,\ R\sin s\big)^{\mathsf{T}}\,.$$

[H32] *Krummlinige Koordinaten* **$[2+4+4+2=12$ Punkte$]$**

Das Differential $\mathrm{d}\phi(\vec{r})$ eines skalaren Feldes ϕ in zwei Dimensionen lautet mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\phi &= \vec{\nabla}\phi\cdot\mathrm{d}\vec{r} \\ &= \partial_x\phi\,\mathrm{d}x + \partial_y\phi\,\mathrm{d}y \\ &= \partial_u\phi\,\mathrm{d}u + \partial_v\phi\,\mathrm{d}v\,, \end{aligned} \tag{1}$$

wobei einmal $\vec{r}=\vec{r}(x,y)$ und ein andermal $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$ verwendet wurde. Wenn die Umrechnung der Koordinaten bekannt ist, $(x,y)=(x(u,v),y(u,v))$, dann hängen die Koordinaten-Differentiale $(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)$ und $(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)$ über die Jacobi-Matrix J zusammen.

(a) Nutzen Sie dies, um auch den Gradienten $(\partial_x\phi,\partial_y\phi)$ durch $(\partial_u\phi,\partial_v\phi)$ auszudrücken. Vorsicht: $(\partial_u\phi,\partial_v\phi)^{\mathsf{T}} \mathrel{\dot{\neq}} \vec{\nabla}\phi$!

(b) Geben Sie J, $|\det J|$, $G=J^{\mathsf{T}}J$, $(\mathrm{d}s)^2$, $\mathrm{d}A$ und $\vec{\nabla}\phi$ an für Polarkoordinaten

$$(x,y) = \big(r\cos\varphi\,,\ r\sin\varphi\big)\,.$$

(c) Das gleiche wie in (b), aber nun für parabolische Koordinaten

$$(x,y) = \big(u\,v\,,\ \tfrac{1}{2}(v^2-u^2)\big)\,.$$

(d) Leiten Sie mit Hilfe von $\partial_u\vec{r}=\vec{e}_u\,b_u$ und $\partial_v\vec{r}=\vec{e}_v\,b_v$ auch eine Formel für den Nabla-Operator $\vec{\nabla}=\vec{e}_x\,\partial_x+\vec{e}_y\,\partial_y$ von der Form $\vec{\nabla}=(\vec{e}_u,\vec{e}_v)\,M\begin{pmatrix}\partial_u\\ \partial_v\end{pmatrix}$ ab. Drücken Sie die Matrix M durch G und (b_u,b_v) aus.

Hinweis: Schreiben Sie die Linearkombinationen in (1) als Zeile mal Spalte und folgern Sie damit $(\partial_x\phi,\partial_y\phi)=(\partial_u\phi,\partial_v\phi)\begin{pmatrix}?&?\\?&?\end{pmatrix}$.

[H33] *Newtonsches Gravitationspotential* **[2 + 2 + 3 + 3 + 3 + 3 = 16 Punkte]**

In der Vorlesung haben wir bereits das Kepler-Problem betrachtet. Für eine Punktmasse m an der Stelle $\vec{r}'$ ist das Potential (also die potentielle Energie pro Testmasse) an der Stelle $\vec{r}$ gegeben durch $V(\vec{r}) = -\frac{\gamma m}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$. Für eine kontinuierliche Massenverteilung mit Dichtefunktion $\rho(\vec{r}')$ hat man dann das Potential

$$V(\vec{r}) = -\int \mathrm{d}^3r' \, \frac{\gamma\, \rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad \text{mit} \quad \int \mathrm{d}^3r' \rho(\vec{r}') = M\,,$$

wobei M die Gesamtmasse der Massenverteilung ist (siehe Vorlesung). Wir betrachten im folgenden der Einfachheit halber eine kugelförmige Massenverteilung mit Radius R_+ und homogener Dichte

$$\rho(\vec{r}') = \begin{cases} \rho_0 & \text{wenn} \quad R_- \le r' \le R_+\,, \\ 0 & \text{wenn} \quad r' < R_- \text{ oder } R_+ < r'\,. \end{cases}$$

Das Problem ist rotationssymmetrisch. Es bieten sich daher Kugelkoordinaten an. Verwenden Sie daher das in der Vorlesung eingeführte Volumenelement $\mathrm{d}^3r' = r'^2 \, \mathrm{d}r' \, \sin\vartheta' \, \mathrm{d}\vartheta' \, \mathrm{d}\varphi'$ für Kugelkoordinaten.

(a) Wir legen ohne Beschränkung der Allgemeinheit die z-Achse in Richtung des (festgehaltenen) Vektors $\vec{r}$. Begründen Sie, warum Sie dann $|\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{\vec{r}^2 + \vec{r}'^2 - 2\,\vec{r}\cdot\vec{r}'} = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\,r\,r'\cos\vartheta'}$ schreiben können. Der Integrand hängt damit nicht von φ' ab. Führen Sie die deshalb sehr einfache Integration über φ' aus.

(b) Zeigen Sie nun allgemein, dass

$$\int_0^\pi \mathrm{d}\vartheta' \, \sin\vartheta' \, f(\cos\vartheta') = \int_{-1}^1 \mathrm{d}u \, f(u)$$

ist. Führen Sie damit die Integration über ϑ' aus. *Hinweis*: Es gilt $\int \mathrm{d}u \, \frac{1}{\sqrt{A-B\,u}} = -\frac{2}{B}\sqrt{A-B\,u}$.

(c) Es bleibt nun nur die Integration über r' übrig. Vereinfachen Sie dafür zunächst die noch verbleibenden Wurzeln. Sie sollten damit auf folgenden Ausdruck kommen:

$$V(\vec{r}) = -2\pi\,\gamma\,\rho_0 \int_{R_-}^{R_+} \mathrm{d}r' \, \frac{r'}{r} \left[\, |r + r'| - |r - r'| \,\right].$$

Für die folgenden Teile müssen Sie jeweils unterscheiden, ob $r' < r$ oder $r' > r$ gilt, um entsprechend die Beträge auswerten zu können. Teilen Sie gegebenenfalls die Integration über r' in zwei Bereiche auf.

(d) Zeigen Sie für $r > R_+$, dass tatsächlich das Potential $V(r) = -\frac{\gamma M}{r}$ identisch zu dem einer Punktladung im Ursprung mit der Gesamtmasse M ist.

(e) Zeigen Sie für $r < R_-$, dass das Potential im Innern der Kugelschale konstant ist, $V(r) \equiv V_0$.

(f) Betrachten Sie die Vollkugel, d.h. $R_- = 0$. Zeigen Sie, dass das Potential im Innern der Massenverteilung, also für $r < R_+$, gegeben ist durch $V(r) = \frac{\gamma M}{2R_+}\left(\frac{r^2}{R_+^2} - 3\right)$.

[!] *Ausführung* **[6 Punkte]**

Mit insgesamt 6 Punkten wird die Ausführung der Lösung insgesamt bewertet, also Leserlichkeit, Vollständigkeit der Rechenwege, Ausführlichkeit der Kommentare zum Lösungsweg usw.